

时标上三阶非线性 p -Laplacian 三点边值问题的正解*

武利猛^{1,2}, 杨 军^{2,3}, 陆海波¹, 张 娟²

(1. 华东师范大学数学系, 上海 200241;

2. 燕山大学理学院, 河北 秦皇岛 066004;

3. 河北省数学研究中心, 河北 石家庄 050000)

摘 要: 研究了时标上三阶非线性 p -Laplacian 三点边值问题

$$[\phi_p(p(t)u^{\Delta\nabla}(t))]^\nabla + a(t)f(t, u(t)) = 0, \quad t \in [0, T],$$

$$\beta u(0) - \gamma u^\Delta(0) = 0, u^\Delta(T) = \alpha u(\eta), u^{\Delta\nabla}(0) = 0$$

借助于锥上的五泛函不动点定理, 得到了边值问题至少有三个正解的一些新的结果, 同时给出了例子验证了主要结果。

关键词: 时标; 边值问题; 正解; 不动点定理

中图分类号: O175.14 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579(2011)03-0017-05

Positive Solutions for Third Order Nonlinear p -Laplacian Three-Point Boundary Value Problems on Time Scales

WU Limeng^{1,2}, YANG Jun^{2,3}, LU Haibo¹, ZHANG Juan²

(1. Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200241, China;

2. College of Science, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China;

3. Mathematics Research Center in Hebei Province, Shijiazhuang 050000, China)

Abstract: The following third order nonlinear p -Laplacian three-point boundary value problems on time scales

$$[\phi_p(p(t)u^{\Delta\nabla}(t))]^\nabla + a(t)f(t, u(t)) = 0, \quad t \in [0, T],$$

$$\beta u(0) - \gamma u^\Delta(0) = 0, u^\Delta(T) = \alpha u(\eta), u^{\Delta\nabla}(0) = 0$$

are studied. By means of five functionals fixed point theorems in cones, some new results for the existence of at least three positive solutions of the boundary value problem are obtained. As an application, an example is given to illustrate the main result.

Key words: time scales; boundary value problem; positive solutions; fixed point theorem

近年来, 时标上的动力方程已引起了许多学者的广泛关注, 越来越多的学者对在时标上利用不动点定理解决 p -Laplacian 边值问题产生了很大兴趣, 有关的内容可参看 Bohner 和 Peterson 的两本专著^[1-2]及相关的参考文献^[3-10]。目前, 关于时标

上二阶 p -Laplacian 动力边值问题的研究较多, 但针对三阶 p -Laplacian 动力边值问题的讨论较少^[7]。

在本文中, \mathbb{T} 表示时标, 为了方便, 对 \mathbb{R} 上的每一个区间 \mathbb{I} , 仍用 \mathbb{I} 表示时标区间, 即 $\mathbb{I} := \mathbb{I} \cap \mathbb{T}$, 受文献^[8-9]的启发, 我们将研究时标上三阶非

* 收稿日期: 2010-05-16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (60604004); 河北省自然科学基金数学研究专项资助项目 (07M005)

作者简介: 武利猛 (1983 年生), 男, 博士; 通讯作者: 杨 军; E-mail: jyang@ysu.edu.cn

线性 p -Laplacian 边值问题

$$[\phi_p(p(t)u^{\Delta\nabla}(t))]^\nabla + a(t)f(t, u(t)) = 0, \quad t \in [0, T] \quad (1)$$

$$\beta u(0) - \gamma u^\Delta(0) = 0, \quad u^\Delta(T) = \alpha u(\eta), \quad u^{\Delta\nabla}(0) = 0 \quad (2)$$

的正解存在性, 其中 $\phi_p(u)$ 是 p -Laplacian 算子,

$$\phi_p(u) = |u|^{p-2}u, \quad p > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \phi_p^{-1}(u) = \phi_q(u), \quad \beta \geq 0, \quad \gamma > 0, \quad \eta \in (0, T), \quad 0, T \in \mathbb{T}, \quad 0 < \alpha < \frac{\beta}{\gamma}, \quad d = \beta - \alpha\beta\eta - \alpha\gamma > 0.$$

贯穿全文假设以下条件成立

(H₁) $f(t, u(t)): [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ 是连续的,

其中 \mathbb{R}^+ 记为非负实数;

(H₂) $p(t) \in C([0, T], (0, +\infty))$ 为单调增加函数;

(H₃) $a: [0, T] \rightarrow [0, \infty)$ 是 ld -连续的, 且 $a(t)$ 在 $[0, T]$ 上的任意子集上不恒为零。

1 定义与引理

为了证明本文的主要结果, 需要如下定义及引理。

定义 1 如果 $\alpha: P \rightarrow [0, \infty)$ 是连续的且

$$\alpha(tx + (1-t)y) \geq t\alpha(x) + (1-t)\alpha(y)$$

对所有的 $x, y \in P$ 和 $t \in [0, 1]$ 成立, 那么映射 α 被称为在实的 Banach 空间 E 上锥 P 中的一个非负连续凹泛函。相似地, 如果 $\beta: P \rightarrow [0, \infty)$ 是连续的且

$$\beta(tx + (1-t)y) \leq t\beta(x) + (1-t)\beta(y)$$

对所有的 $x, y \in P$ 和 $t \in [0, 1]$ 成立, 那么映射 β 被称为在实的 Banach 空间 E 上锥 P 中的一个非负连续凸泛函。

设 γ, β, θ 是在锥 P 上的非负连续的凸泛函, α, ϕ 是锥 P 上非负连续凹泛函。对非负实数 h, a, b, d 和 c , 定义下面的凸集

$$P(\gamma, c) = \{x \in P \mid \gamma(x) < c\};$$

$$P(\gamma, \alpha, a, c) = \{x \in P: a \leq \alpha(x), \gamma(x) \leq c\};$$

$$Q(\gamma, \beta, d, c) = \{x \in P: \beta(x) \leq d, \gamma(x) \leq c\};$$

$$P(\gamma, \theta, \alpha, a, b, c) = \{x \in P: a \leq \alpha(x),$$

$$\theta(x) \leq b, \gamma(x) \leq c\};$$

$$Q(\gamma, \beta, \phi, h, d, c) = \{x \in P: h \leq \phi(x),$$

$$\beta(x) \leq d, \gamma(x) \leq c\}.$$

定义 2 令 Banach 空间 $E = C_{ld}[0, T]$ 且范数

$\|u\| = \sup_{t \in [0, T]} |u(t)|$ 。定义锥 $P \subset E$, 且

$P = \{u \in E \mid u \text{ 在 } [0, T] \text{ 中是凹的, 递增且非负}\}$

引理 1 如果 $d \neq 0$, 则对 $h(t) = C_{ld}[\mathbb{T}, \mathbb{R}]$, 动力方程边值问题

$$[\phi_p(p(t)u^{\Delta\nabla}(t))]^\nabla + h(t) = 0, \quad t \in [0, T] \quad (3)$$

$$\beta u(0) - \gamma u^\Delta(0) = 0,$$

$$u^\Delta(T) = \alpha u(\eta), \quad u^{\Delta\nabla}(0) = 0 \quad (4)$$

有唯一解

$$u(t) = - \int_0^t (t-s) \frac{1}{p(s)} \phi_q \left(\int_0^s h(r) \nabla r \right) \nabla s + \frac{(\beta t + \gamma)}{d} \int_0^T \frac{1}{p(s)} \phi_q \left(\int_0^s h(r) \nabla r \right) \nabla s - \frac{\alpha(\beta t + \gamma)}{d} \int_0^\eta (\eta-s) \frac{1}{p(s)} \phi_q \left(\int_0^s h(r) \nabla r \right) \nabla s \quad (5)$$

证明 对式 (3) 从 0 到 t 进行积分, 得到

$$\phi_p(p(t)u^{\Delta\nabla}(t)) = - \int_0^t h(r) \nabla r$$

即

$$u^{\Delta\nabla}(t) = - \frac{1}{p(t)} \phi_q \left(\int_0^t h(r) \nabla r \right) \quad (6)$$

对式 (6) 从 0 到 t 进行积分, 得到

$$u^\Delta(t) = u^\Delta(0) - \int_0^t \frac{1}{p(s)} \phi_q \left(\int_0^s h(r) \nabla r \right) \nabla s \quad (7)$$

再对式 (7) 从 0 到 t 进行积分, 得到

$$u(t) = u(0) + tu^\Delta(0) - \int_0^t (t-s) \frac{1}{p(s)} \phi_q \left(\int_0^s h(r) \nabla r \right) \nabla s \quad (8)$$

令 $t = T, \eta$ 代入式 (7) 和 (8) 有

$$u^\Delta(T) = u^\Delta(0) - \int_0^T \frac{1}{p(s)} \phi_q \left(\int_0^s h(r) \nabla r \right) \nabla s \quad (9)$$

$$u(\eta) = u(0) + \eta u^\Delta(0) -$$

$$\int_0^\eta (\eta-s) \frac{1}{p(s)} \phi_q \left(\int_0^s h(r) \nabla r \right) \nabla s \quad (10)$$

将式 (9)、(10) 代入式 (4) 有

$$u^\Delta(0) = \frac{\beta}{d} \int_0^T \frac{1}{p(s)} \phi_q \left(\int_0^s h(r) \nabla r \right) \nabla s - \frac{\alpha\beta}{d} \int_0^\eta (\eta-s) \frac{1}{p(s)} \phi_q \left(\int_0^s h(r) \nabla r \right) \nabla s \quad (11)$$

$$u(0) = \frac{\gamma}{d} \int_0^T \frac{1}{p(s)} \phi_q \left(\int_0^s h(r) \nabla r \right) \nabla s - \frac{\alpha\gamma}{d} \int_0^\eta (\eta-s) \frac{1}{p(s)} \phi_q \left(\int_0^s h(r) \nabla r \right) \nabla s \quad (12)$$

将式 (11)、(12) 代入式 (8), 可以在 $[0, T]$ 得到式 (5)。证毕。

引理 2 如果 $0 < \alpha < \beta/\gamma$ 和 $d > 0$, 则边值问题 (3), (4) 的唯一解 $u(t)$ 满足

$$u(t) \geq 0, \quad t \in [0, T]$$

证明 类似于文 [4] 引理 2.2 的证明, 这里省略。

引理 3 令 $\alpha > \beta/\gamma$ 和 $d \neq 0$, 则边值问题 (3), (4) 无正解。

证明 类似于文 [4] 引理 2.3 的证明, 这里省略。

引理 4 如果 $u \in P$, 那么

$$(i) u(t) \geq \frac{t}{T} \|u\|, t \in [0, T];$$

$$(ii) su(t) \leq tu(s), s, t \in [0, T], s \leq t$$

$$\text{其中 } \|u\| = \sup_{t \in [0, T]} |u(t)|.$$

证明 (i) 见文献 [10]。接下来证明 (ii) 成立。如果 $t = s$, 结论显然成立。如果 $s < t$, 因为 $u(t)$ 是凹的、递增且非负, 则

$$\frac{u(t) - u(0)}{t} \leq \frac{u(s) - u(0)}{s}$$

$$\text{即 } tu(s) \geq su(t) + (t - s)u(0) \geq su(t)$$

证毕。

引理 5^[8] P 是实 Banach 空间 E 中的锥, 假设存在正实数 c 和 M , 锥 P 上的非负连续凹泛函 α 和 φ 以及锥 P 上的非负连续凸泛函 γ, β 和 θ 满足 $\alpha(x) \leq \beta(x)$ 且 $\|x\| \leq M\gamma(x), x \in \overline{P(\gamma, c)}$ 。 $\Phi: P(\gamma, c) \rightarrow P(\gamma, c)$ 是全连续的且存在非负常数 h, a, k, b , 其中 $0 < a < b$, 满足

(i) $\{x \in P(\gamma, \theta, \alpha, b, k, c) : \alpha(x) > b\} \neq \emptyset$ 且 $x \in P(\gamma, \theta, \alpha, b, k, c)$, 有 $\alpha(\Phi(x)) > b$;

(ii) $\{x \in Q(\gamma, \beta, \varphi, h, a, c) : \beta(x) < a\} \neq \emptyset$ 且 $x \in Q(\gamma, \beta, \varphi, h, a, c)$ 有 $\beta(\Phi(x)) < a$;

(iii) 对任意 $x \in P(\gamma, \alpha, b, c)$ 且满足 $\theta(\Phi(x)) > k$, 有 $\alpha(\Phi(x)) > b$;

(iv) 对任意 $x \in Q(\gamma, \beta, a, c)$ 且满足 $\varphi(\Phi(x)) < h$, 有 $\beta(\Phi(x)) < a$ 。

则 Φ 至少存在三个不动点 $x_1, x_2, x_3 \in \overline{P(\gamma, c)}$ 使得 $\beta(x_1) < a, b < \alpha(x_2)$ 和 $a < \beta(x_3), \alpha(x_3) < b$ 易知边值问题 (1)、(2) 有解 $u = u(t)$ 当且仅当 u 是算子方程

$$\begin{aligned} Au(t) = & - \int_0^t (t-s) \frac{1}{p(s)} \cdot \\ & \phi_q \left(\int_0^s a(r) f(r, u(r)) \nabla r \right) \nabla s + \\ & \frac{(\beta t + \gamma)}{d} \int_0^T \frac{1}{p(s)} \phi_q \left(\int_0^s a(r) f(r, u(r)) \nabla r \right) \nabla s - \\ & \frac{\alpha(\beta t + \gamma)}{d} \int_0^\eta (\eta - s) \frac{1}{p(s)} \cdot \\ & \phi_q \left(\int_0^s a(r) f(r, u(r)) \nabla r \right) \nabla s \end{aligned} \quad (13)$$

的不动点。

2 三个正解的存在性

固定 $l, w \in \mathbb{T}$ 且满足 $\eta < l < w < T$ 。在锥 P 中定义非负连续凹泛函 α 和 φ 与非负连续凸泛函 γ, β 和 θ

$$\gamma(u) = \theta(u) = \max_{t \in [0, \eta]} u(t) = u(\eta);$$

$$\alpha(u) = \min_{t \in [l, w]} u(t) = u(l);$$

$$\beta(u) = \max_{t \in [0, l]} u(t) = u(l);$$

$$\varphi(u) = \min_{t \in [\eta, T]} u(t) = u(\eta)$$

易知 $\alpha(u) = \beta(u), u \in P$ 。由引理 4 可知, $\gamma(u)$

$$= \max_{t \in [0, \eta]} u(t) = u(\eta) \geq \frac{\eta}{T} \|u\|, \text{ 即 } \|u\| \leq$$

$$\frac{T}{\eta} \gamma(u)。$$
 记

$$M = \frac{T(\beta\eta + \gamma)}{P(0)d} \phi_q \left(\int_0^T a(r) \nabla r \right);$$

$$m = \frac{[\alpha\gamma l(T - \eta) + l\gamma](T - w)}{p(T)Td} \phi_q \left(\int_l^w a(r) \nabla r \right);$$

$$\lambda = \frac{T(\beta l + \gamma)}{p(0)d} \phi_q \left(\int_0^T a(r) \nabla r \right)$$

贯穿全文假定 $\int_l^w a(r) \nabla r > 0$ 。

定理 1 假设条件 $(H_1), (H_2), (H_3)$ 成立, $0 < a < \frac{l}{T}b < \frac{l\eta}{T^2}c, Mb < mc$ 且 f 满足以下条件:

$$(H_4) f(t, u(t)) < \phi_p \left(\frac{c}{M} \right), \text{ 若 } t \in [0, T], 0 \leq u(t) \leq \frac{T}{\eta}c;$$

$$(H_5) f(t, u(t)) > \phi_p \left(\frac{b}{m} \right), \text{ 若 } t \in [l, w], b \leq u(t) \leq \frac{T^2}{\eta^2}b;$$

$$(H_6) f(t, u(t)) < \phi_p \left(\frac{a}{\lambda} \right), \text{ 若 } t \in [0, T], 0 \leq u(t) \leq \frac{T}{l}a。$$

则边值问题 (1)、(2) 至少有三个正解 $u_1(t), u_2(t)$ 和 $u_3(t)$ 满足

$$\max_{t \in [0, l]} u_1(t) < a, b < \min_{t \in [l, w]} u_2(t) \text{ 且}$$

$$a < \max_{t \in [0, l]} u_3(t), \min_{t \in [l, w]} u_3(t) < b$$

证明 由条件 $(H_1), (H_2), (H_3)$ 容易验证 $A: P \rightarrow P$ 是全连续映射。现在证明引理 5 中的条件对 A 成立。令 $u \in P$, 由 (5), (13) 和引理 2 知,

当 $t \in [0, T]$ 有

$$(Au)^{\Delta \nabla}(t) = -\frac{1}{p(t)}\phi_q\left(\int_0^t a(r)f(r, u(r)) \nabla r\right) \leq 0,$$

$$(Au)(T) \geq 0;$$

$$(Au)^\Delta(t) \geq (Au)^\Delta(T) = \alpha(Au)(\eta) \geq 0$$

即 $(Au)(t)$ 在 $[0, T]$ 中是凹的, 递增且非负, 由此知 $Au \in P$ 。

选取 $u \in \overline{P(\gamma, c)}$, 则 $\gamma(u) = \max_{t \in [0, \eta]} u(t) = u(\eta) \leq c$, 则 $0 \leq u(t) \leq c, t \in [0, \eta]$, 由引理 4 可知 $\|u\| = u(T) \leq \frac{Tu(\eta)}{\eta} \leq \frac{Tc}{\eta}$, 即 $0 \leq u(t) \leq \frac{Tc}{\eta}, t \in [0, T]$ 。由 (H_4) 可知

$$\begin{aligned} \gamma(Au) &= (Au)(\eta) = \\ & - \int_0^\eta (\eta - s) \frac{1}{p(s)}\phi_q\left(\int_0^s a(r)f(r, u(r)) \nabla r\right) \nabla s + \\ & \frac{(\beta\eta + \gamma)}{d} \int_0^T \frac{1}{p(s)}\phi_q\left(\int_0^s a(r)f(r, u(r)) \nabla r\right) \nabla s - \\ & \frac{\alpha(\beta\eta + \gamma)}{d} \int_0^\eta (\eta - s) \frac{1}{p(s)} \cdot \\ & \phi_q\left(\int_0^s a(r)f(r, u(r)) \nabla r\right) \nabla s \leq \\ & \frac{T(\beta\eta + \gamma)}{P(0)d} \phi_q\left(\int_0^T a(r)f(r, u(r)) \nabla r\right) < \\ & \frac{T(\beta\eta + \gamma)c}{MP(0)d} \phi_q\left(\int_0^T a(r) \nabla r\right) = c \end{aligned}$$

从而 $Au \in \overline{P(\gamma, c)}$ 。

接下来验证引理 5 中的条件 (i) 成立。取 $u = \frac{Tb}{\eta}, k = \frac{Tb}{\eta}$, 则 $\alpha(u) = u(l) = \frac{Tb}{\eta} > b, \theta(u) = u(\eta) = \frac{Tb}{\eta} = k, \gamma(u) = \frac{Tb}{\eta} < c$, 从而 $\{u \in P(\gamma, \theta, \alpha, b, \frac{Tb}{\eta}, c) : \alpha(u) > b\} \neq \emptyset$, 对于 $u \in P(\gamma, \theta, \alpha, b, \frac{Tb}{\eta}, c)$, 满足

$$\theta(u) = \max_{t \in [0, \eta]} u(t) = u(\eta) \leq \frac{Tb}{\eta},$$

$$\alpha(u) = \min_{t \in [l, w]} u(t) = u(l) \geq b$$

则 $0 \leq u(t) \leq \frac{Tb}{\eta}, t \in [0, \eta]$, 由引理 4 可知 $\|u\| \leq \frac{Tu(\eta)}{\eta} \leq \frac{T^2b}{\eta^2}, t \in [0, \eta]$, 从而

$$b \leq u(t) \leq \frac{T^2b}{\eta^2}, t \in [l, w]$$

由 (H_5) 可知

$$\alpha(Au) = (Au)(l) \geq \frac{l}{T} \|Au\| = \frac{l}{T}(Au)(T) \geq$$

$$\frac{l}{T} \left[\frac{\alpha\beta\eta T + \alpha\gamma T + \gamma}{d} \right]$$

$$\begin{aligned} & \int_0^T \frac{1}{p(s)}\phi_q\left(\int_0^s a(r)f(r, u(r)) \nabla r\right) \nabla s + \\ & \int_0^T \frac{s}{p(s)}\phi_q\left(\int_0^s a(r)f(r, u(r)) \nabla r\right) \nabla s - \\ & \frac{\alpha\eta(\beta T + \gamma)}{d} \int_0^T \frac{1}{p(s)}\phi_q\left(\int_0^s a(r)f(r, u(r)) \nabla r\right) \nabla s + \\ & \frac{\alpha\beta T + \alpha\gamma}{d} \int_0^\eta \frac{s}{p(s)}\phi_q\left(\int_0^s a(r)f(r, u(r)) \nabla r\right) \nabla s \geq \\ & \frac{\alpha\gamma l(T - \eta) + l\gamma}{Td} \int_0^T \frac{1}{p(s)}\phi_q\left(\int_0^s a(r)f(r, u(r)) \nabla r\right) \nabla s \geq \\ & \frac{\alpha\gamma l(T - \eta) + l\gamma}{Td} \int_w^T \frac{1}{p(s)}\phi_q\left(\int_0^s a(r)f(r, u(r)) \nabla r\right) \nabla s \geq \\ & \frac{\alpha r l(T - \eta) + l\gamma}{Td} \cdot \frac{T - w}{p(T)} \phi_q\left(\int_0^w a(r)f(r, u(r)) \nabla r\right) > \\ & \frac{[\alpha\gamma l(T - \eta) + l\gamma](T - w)}{p(T)Td} \phi_q\left(\int_l^w a(r) \nabla r\right) \frac{b}{m} = b \end{aligned}$$

即引理 5 的 (i) 成立。

下面验证引理 5 的 (ii) 成立。取 $u = \frac{\alpha\eta}{T}, h = \frac{\alpha\eta}{T}$, 则

$$\gamma(u) = u(\eta) = \frac{\alpha\eta}{T} < c,$$

$$\varphi(u) = u(\eta) = \frac{\alpha\eta}{T} = h,$$

$$\beta(u) = u(l) = \frac{\alpha\eta}{T} < a$$

所以 $\{u \in Q(\gamma, \beta, \varphi, h, a, c) : \beta(u) < a\} \neq \emptyset$ 。选取 $u \in Q(\gamma, \beta, \varphi, \frac{\alpha\eta}{T}, a, c)$, 则 $\beta(u) = \max_{t \in [0, l]} u(t) = u(l) \leq a$, 则 $0 \leq u(t) \leq a, t \in [0, l]$ 。由引理 4 可知 $\|u\| \leq \frac{Tu(l)}{l} \leq \frac{Ta}{l}, t \in [0, T]$, 有

$$0 \leq u(t) \leq \frac{Ta}{l}, t \in [0, T]$$

由 (H_6) 可知

$$\begin{aligned} \beta(Au) &= (Au)(l) \leq \\ & \frac{\beta l + \gamma}{d} \int_0^T \frac{1}{p(s)}\phi_q\left(\int_0^s a(r)f(r, u(r)) \nabla r\right) \nabla s \leq \\ & \frac{\beta l + \gamma}{d} \cdot \frac{T}{p(0)} \phi_q\left(\int_0^T a(r)f(r, u(r)) \nabla r\right) \nabla s \leq \\ & \frac{T(\beta l + \gamma)}{p(0)d} \phi_q\left(\int_0^T a(r)f(r, u(r)) \nabla r\right) \leq \\ & \frac{T(\beta l + \gamma)}{p(0)d} \phi_q\left(\int_0^T a(r) \nabla r\right) \frac{a}{\lambda} = a \end{aligned}$$

则引理 5 中的 (ii) 成立。

接下来验证引理 5 的 (iii) 成立。 $u \in P(r, \alpha, b, c)$ 且 $\theta(Au) = Au(\eta) > k = \frac{Tb}{\eta}$ 则

$$\alpha(Au) = (Au)(l) \geq \frac{l}{T}(Au)(l) \geq$$

$$\frac{l}{T}(Au)(\eta) > \frac{l}{T} \times \frac{Tb}{\eta} = \frac{lb}{\eta} > b$$

最后验证引理 5 中的条件 (iv) 成立。令 $u \in$

$Q(\gamma, \beta, a, c)$ 且 $\varphi(A(u)) = (Au)(\eta) < h = \frac{a\eta}{T}$,

由引理 4 可知

$$\beta(Au) = (Au)(l) \leq \frac{T}{l}(Au)(l) \leq$$

$$\frac{T}{\eta}(Au)(\eta) < \frac{T}{\eta} \times \frac{a\eta}{T} = a$$

引理 5 中的条件 (iv) 成立。

于是, 由引理 5 可知 A 至少有三个不动点, 即边值问题 (1)、(2) 至少有三个正解 $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$, 使得

$$\max_{t \in [0, l]} u_1(t) < a, \quad b < \min_{t \in [l, w]} u_2(t) \text{ 且}$$

$$a < \max_{t \in [0, l]} u_3(t), \quad \min_{t \in [l, w]} u_3(t) < b$$

证毕。

3 应用例子

例 1 令 $T = \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{N_0}\right\} \cup \{1\}$, N_0 定义为所有非负整数, 考虑边值问题

$$[\phi_p(u^{\Delta\nabla}(t))]^\nabla + f(t, u(t)) = 0, \quad t \in [0, 1] \quad (14)$$

$$2u(0) - \frac{1}{2}u^\Delta(0) = 0, \quad u^\Delta(T) = u(\eta),$$

$$u^{\Delta\nabla}(0) = 0 \quad (15)$$

$$f(t, u) = f(u) =$$

$$\begin{cases} 0.3, & 0 \leq u \leq 3 \\ 0.3 + \frac{5499.7}{147}(u-3), & 3 \leq u \leq 150 \\ 5500, & u \geq 150 \end{cases}$$

容易验证 $f(u(t))$ 满足定理 1 的所有条件, 则边值问题 (14), (15) 至少存在三个正解 $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$ 。

参考文献:

- [1] BOHNER M, PETERSON A. Dynamic equations on time scales: an introduction with applications [M]. Boston: Birkhäuser, 2001.
- [2] BOHNER M, PETERSON A. Advances in dynamic equations on time scales [M]. Boston: Birkhäuser, 2003.
- [3] HONG S H. Triple positive solutions of three-point boundary value problems for p -Laplacian dynamic equations on time scales [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2007, 206: 967-976.
- [4] 王培光, 王颖. 时间尺度上二阶动力方程三点边值问题解的存在性 [J]. 数学学报, 2007, 50(3): 701-706.
- [5] SUN H R, LI W T. Multiple positive solutions for p -Laplacian m -point boundary value problems on time scales [J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 182: 478-491.
- [6] LIANG S H, ZHANG J H, WANG Z Y. The existence of three positive solutions of m point boundary value problems for some dynamic equations on time scales [J]. Mathematical and Computer Modelling, 2009, 49: 1386-1393.
- [7] HAN W, LIU M X. Existence and uniqueness of a non-trivial solution for a class of third-order nonlinear p -Laplacian m -point eigenvalue problems on time scales [J]. Nonlinear Analysis, 2009, 70: 1877-1889.
- [8] SU Y H, LI W T. Triple positive solutions of m -point BVPs for p -Laplacian dynamic equations on time scales [J]. Nonlinear Analysis, 2008, 69: 3811-3820.
- [9] HE Z M, LI L. Multiple positive solutions for the one-dimensional p -Laplacian dynamic equations on time scales [J]. Mathematical and Computer Modelling, 2007, 45: 68-79.
- [10] HE Z M. Double positive solutions of three-point boundary value problems for p -Laplacian dynamic equations on time scales [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2005, 182: 304-315.